УДК 532.214; 539.374

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА, СВЯЗАННЫХ С МЕРАМИ НЕКОМПАКТНОСТИ

ПОТАПОВ Александр Сергеевич,
кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики
и методики преподавания математики,
Воронежский государственный педагогический университет

АННОТАЦИЯ*. Рассматриваются несколько числовых характеристик банахова пространства, связанных с мерами некомпактности Хаусдорфа. Устанавливается связь меры некомпактности множества с его r-поперечниками, доказывается теорема о рефлексивности банахова пространства, уточняющая и усиливающая ранее полученные результаты.*
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА*: мера некомпактности, r-поперечник, рефлексивность банахова пространства, модуль некомпактной выпуклости, коэффициент некомпактной выпуклости.*

POTAPOV A.S.,
Cand. Sci. Fhys. And Math., Professor, Head of the Department
of Computer Science and Mathematics Teaching Methods,
Voronezh State Pedagogical University

ON SOME GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF BANACH SPACES ASSOCIATED WITH THE MEASURES OF NON-COMPACTNESS

ABSTRACT*. Several numerical characteristics of a Banach space associated with the measure of non-compactness of Hausdorf considered. The link is established measures of non-compactness of the set with its r-cross sections, the theorem on the reflexivity of Banach spaces, clarifying and reinforcing the previously obtained results is proved.*
KEY WORDS*: measure of non-compactness, r-cross-section, reflexivity of Banach space, modulus and coefficient of noncompact convexity.*

1. В этом пункте мы доказываем теорему, устанавливающую связь между мерой некомпактности Хаусдорфа ограниченного множества в банаховом пространстве и его r-поперечниками.

Определим основные понятия, используемые далее. Пусть E − банахово пространство, Ω − ограниченное множество в пространстве E.

Определение ([1])

Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi(\Omega)$ множества Ω называется точная нижняя грань тех $\varepsilon>0$, при которых множество Ω имеет в пространстве E конечную ε-сеть.

Напомним, что множество $N\subset E$ называется ε-сетью для Ω, если $\Omega\subset N+\varepsilon B$, где B − замкнутый единичный шар в пространстве E с центром в нуле, а

$$N+\varepsilon B=\{x+\varepsilon y:\ x\in N, y\in B\}.$$

Определение ([2])

r-поперечником $\delta_r(\Omega)$ множества Ω называется точная нижняя грань тех $\delta>0$, для которых в E существует подпространство F размерности, не превосходящей r такое, что $\Omega\subset F+\delta B$.

Отметим сразу, что последовательность чисел $\delta_0(\Omega)$, $\delta_1(\Omega)$,.., $\delta_r(\Omega)$,.. является монотонно убывающей и ограниченной снизу (например, числом 0).

Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\delta_r(\Omega),$$

который и устанавливает связь между мерой некомпактности Хаусдорфа множества Ω и его r-поперечниками.

Теорема 1

Имеет место следующее равенство:

$$\chi(\Omega)=\lim_{r\to\infty}\delta_r(\Omega).$$

Доказательство

Пусть $\chi(\Omega)=a$. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует конечное число точек $x_1, x_2,..., x_r$, в пространстве E таких, что

$$\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{r}x_i+(a+\varepsilon)B.$$

Обозначим через $L=L(x_1, x_2,...,x_r)$ линейную оболочку элементов $x_1, x_2,...,x_r$. L является конечномерным подпространством в пространстве E, причем $\dim L\le r$.

Нетрудно видеть, что

$$\bigcup_{i=1}^{r}x_i+(a+\varepsilon)B\subset L(x_1,x_2,\dots,x_r)+(a+\varepsilon)B.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно указать подпространство L размерности, не превосходящей r такое, что

$$\Omega\subseteq L+(a+\varepsilon)B.$$

Из этого следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое r_0, что

$$\delta_{r_0}(\Omega)\le a+\varepsilon.$$

Информация для связи с автором: aspo@vspu.ac.ru

Тогда для всех $r>r_0$ и подавно $\delta_r(\Omega) \le a + \varepsilon$ и, следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} \delta_r(\Omega) \le a + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε можно сделать вывод, что

$\lim_{r\to\infty} \delta_r(\Omega) \le a$, т.е.

$$\chi(\Omega) \ge \lim_{r\to\infty} \delta_r(\Omega). \qquad (1)$$

Докажем противоположное неравенство.

Пусть

$$\lim_{r\to\infty} \delta_r(\Omega) = b$$

Так как последовательность $\delta_r(\Omega)$ стремится к b, убывая, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число r_0, что $\delta_{r_0}(\Omega) < b + \varepsilon$.

В силу определения r-поперечника и свойств инфимума отсюда следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое линейное подпространство F размерности $dimF \le r_0$, что $\Omega \subset F + (b+2\varepsilon)B$.

Так как множество Ω ограничено, то существует такое число K, что для любого $x \in \Omega$ $\|x\| \le K$.

В силу конечномерности пространства F множество $B \cap F$ вполне ограничено, а вместе с ним вполне ограничено и множество $(K + b + 2\varepsilon)(B \cap F)$.

Поэтому для него найдется конечная ε-сеть { $x_1, x_2, \dots, x_m$ }, то есть

$$(K + b + 2\varepsilon)(B \cap F) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} x_i + \varepsilon B.$$

Далее, если $x \in \Omega$, то

$$x = (b+2\varepsilon)z + y, \text{ где } \|z\| \le 1, y \in F.$$

Отсюда

$$\|y\| \le \|x\| + b + 2\varepsilon \le K + b + 2\varepsilon.$$

Поэтому $y \in (K + b + 2\varepsilon)(B \cap F)$

и, следовательно,

$$\Omega \subset (b+2\varepsilon)B + (K + b + 2\varepsilon)(B \cap F) \subset$$

$$\subset (b+2\varepsilon)B + \bigcup_{i=1}^{m} x_i + \varepsilon B \subset \bigcup_{i=1}^{m} x_i + (b+3\varepsilon)B.$$

Это означает, что $\chi(\Omega) \le b + 3\varepsilon$.

В силу произвольности ε получаем $\chi(\Omega) \le b$, т.е.

$$\chi(\Omega) \le \lim_{r\to\infty} \delta_r(\Omega). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) и получается требуемое равенство

$$\chi(\Omega) = \lim_{r\to\infty} \delta_r(\Omega).$$

Теорема доказана.

2. В геометрической теории банаховых пространств достаточно важную роль играет понятие модуля выпуклости. С его помощью, например, банаховы пространства классифицируются в соответствии и с их геометрической структурой, он используется в теории неподвижных точек, теории равномерно выпуклых и рефлексивных пространств и др.

В работах [3], [4] были введены геометрические характеристики банаховых пространств, использующие понятие меры некомпактности, в какой-то степени обобщающие и развивающие идею модуля выпуклости.

Мы даем здесь несколько определений подобного рода характеристик, сравниваем их и приводим одну теорему о рефлексивности банахова пространства.

Всюду далее через E мы будем обозначать банахово пространство, B и S, соответственно, – замкнутый единичный шар и единичная сфера в E с центром в нуле θ, $B(x,a)$ – замкнутый единичный шар с центром в точке x радиуса $a\Omega$, B^* и S^* – замкнутый единичный шар и сфера в сопряженном пространстве E^*, B^{**} – замкнутый единичный шар во втором сопряженном пространстве E^{**}.

Определение 1([4])

Модулем некомпактной выпуклости банахова пространства E называется функция

$$\Delta_E(\varepsilon) = inf\{1 - d(\theta, X)\colon X \subset B,\ X = coX,\ \chi(X) \ge \varepsilon\}$$

и коэффициентом некомпактной выпуклости называется величина

$$\varepsilon_1(E) = sup\{\varepsilon\colon \Delta_E(\varepsilon) = 0\}.$$

В [4] доказывается следующая теорема.

Теорема 2

Если $\varepsilon_1(E) < \frac{1}{2}$, то пространство E рефлексивно.

Введем в рассмотрение еще две характеристики, которые обозначим $\beta(E)$ и $\gamma(E)$.

Определение ([3])

Мерой некомпактной выпуклости банахова пространства E называется число

$$\beta(E) - \inf_{t>0} \sup_{\Omega_t} \{\chi(\Omega_t)\colon \Omega_t \subset B(\theta,1) \setminus B(\theta, 1-t) \text{ и } \Omega_t \text{ выпукло}\}.$$

Если мы введем обозначение

$$\varphi(t) = sup\{\chi(\Omega_t)\colon \Omega_t \subset B(\theta,1) \setminus B(\theta,1-t),\ \Omega_t \text{ выпукло}\},$$

то величину $\beta(E)$, очевидно, можно определить и следующим образом:

$$\beta(E) = \lim_{t\to 0} \varphi(t).$$

Для любого линейного непрерывного функционала $f \in S^*$ и любого t обозначим через $D(t,f)$ множество

$$D(t,f) = \{x\colon f(x) > 1 - t,\ x \in B\},$$

а через $\gamma(E)$ обозначим следующий предел:

$$\gamma(E) = \lim_{t\to 0} \sup_{f\in S^*} \chi(D(t,f)).$$

Оказывается, что для введенных выше характеристик $\varepsilon_1(E)$, $\beta(E)$ и $\gamma(E)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 3

Величины $\beta(E)$, $\gamma(E)$ и $\varepsilon_1(E)$ совпадают.

Доказательство

Докажем сначала равенство $\beta(E)$ и $\gamma(E)$.

Для каждого выпуклого множества Ω_t из сферического слоя

$$B(\theta,1) \setminus B(\theta,1-t)$$

существует функционал $f \in S^*$ такой, что $\Omega_t \subset D(t,f)$. Следовательно,

$\chi(\Omega_t) \le \chi(D(t,f))$.

Но тогда, тем более, для каждого Ω_t выполняется неравенство

$\chi(\Omega_t) \le sup\{\chi(D(t,f)):\ f \in S^*\}$.

Отсюда

$sup\{\chi(\Omega_t):\ \Omega_t \subset B(\theta,1)\backslash B(\theta,1-t),\ \Omega_t \text{ выпукло}\} \le sup\{\chi(D(t,f)):\ f \in S^*\}$,

и, следовательно, пределы левой и правой части этого неравенства при $t \to 0$ связаны тем же неравенством, т.е.

$\beta(E) \le \gamma(E)$.

Докажем противоположное неравенство. Любое множество $D(t,f)$, очевидно, выпукло и лежит в сферическом слое $B(\theta,1)\backslash B(\theta,1-t)$. Тогда

$\chi(D(t,f)) \le sup\{\chi(\Omega_t):\Omega_t \subset B(\theta,1)\backslash B(\theta,1-t),\ \Omega_t - \text{выпукло}\}$.

Следовательно,

$\sup\limits_{f\in S^*}\chi(D(t,f)) \le \sup\limits_{\Omega_t}\chi(\Omega_t)$

и, значит,

$\gamma(E) \le \beta(E)$,

что и требовалось доказать.

Установим теперь равенство величин $\varepsilon_1(E)$ и $\beta(E)$.

Пусть $\varepsilon_1(E) = a$. Тогда для любого $t > 0$ существует такое ε, что $\Delta_E(\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon > a - t$. Из определения $\Delta_E(\varepsilon)$ следует, что для любого $t_n > 0$ существует выпуклое множество $\Omega_n \subseteq B$ такое, что $\chi(\Omega_n) \ge \varepsilon$ и $1 - d(\theta,\Omega_n) < t_n$, или $d(\theta,\Omega_n) > 1 - t_n$.

Пусть $t_n \to 0$. Тогда для соответствующей последовательности множеств Ω_n имеем

$\Omega_n \subseteq B(\theta,1)\backslash B(\theta,1-t_n)$

и $\chi(\Omega_n) \ge \varepsilon > a - t$.

Но тогда для любого t_n и подавно

$\varphi(t_n) \ge a - t$.

Следовательно,

$\lim\limits_{t_n\to 0}\varphi(t_n) \ge a - t$,

и, значит,

$\beta(E) \ge a - t$.

В силу произвольности t

$\beta(E) \ge a - \varepsilon_1(E)$.

Докажем противоположное неравенство.

Пусть $\beta(E) = b$.

Так как функция $\varphi(t)$ монотонно убывает, то для любого $t > 0$

$\varphi(t) \ge b$.

Выберем последовательность $t_n > 0$, стремящуюся к нулю, и произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого t_n мы можем найти множество

$\Omega_n \subseteq B(\theta,1)\backslash B(\theta,1-t_n)$

такое, что

$\chi(\Omega_n) > \varphi(t_n) - \varepsilon \ge b - \varepsilon$.

Таким образом, для множеств Ω_n выполняются неравенства

$\chi(\Omega_n) > b - \varepsilon$ и $1 - d(\theta,\Omega_n) < t_n$.

Отсюда

$\Delta_E(b-\varepsilon) = inf\{1 - d(\theta,\Omega):\ \Omega \subseteq B, \Omega = co\Omega, \chi(\Omega) \ge b - \varepsilon\} = 0$

Следовательно,

$\varepsilon_1(E) = sup\{\alpha:\ \Delta_E(\alpha) = 0\} \ge b - \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$

$\varepsilon_1(E) \ge b = \beta(E)$.

Теорема доказана.

Теорема 4

Если $\beta(E) < 1$, то банахово пространство E рефлексивно.

Доказательство

Обозначим через П естественное вложение банахова пространства E во второе сопряженное пространство E^{**}. Если предположить, что E не рефлексивно, то множество $\Pi(E)$ является собственным подмножеством пространства E^{**}, т.е. $\Pi(E) \subset E^{**}$.

Тогда для любого $t > 0$ найдется $F_0 \in E^{**}$ такой, что

$$\|F_0\| = 1 \text{ и } \|F_0 - \Pi(x)\| > 1 - t \text{ для любого } x \in E.$$

Возьмем произвольное $t > 0$ и выберем соответствующий элемент F_0. Пусть $f \in E^*$ такой линейный непрерывный функционал, что $\|f\| = 1$ и $F_0(f) > 1 - t$. Рассмотрим в пространстве E^{**} множество

$U = \{F:\ F(f) > 1 - t\}$.

Понятно, что U открытое в E^*-топологии подмножество E^{**} и $F_0 \in U$. Множество $U \cap B^{**}$, очевидно, содержит элемент F_0 и для него имеет место включение $U \cap B^{**} \subseteq cl(V)$, где

$$V = U \cap \Pi(B) = \{F\colon F(f) > 1 - t,\ F(f) = f(x),\ \|x\| \le 1\},$$

а cl обозначает замыкание в E^*-топологии в пространстве E^{**}.

Обозначим через W прообраз множества V в E при отображении Π:

$W = \Pi^{-1}(V) = \{x\colon f(x) > 1 - t,\ \|x\| \le 1\}.$

Так как по предположению $\beta(E) < 1$, то

$\lim\limits_{t\to 0}\sup\limits_{f\in E^*} \chi(\{x\colon f(x) > 1 - t,\ \|x\| \le 1\}) = q < 1.$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое $t_0 > 0$, что если $t < t_0$, то для всех $f \in S^*$

$$\chi(\{x\colon f(x) > 1 - t,\ \|x\| \le 1\}) = q + \varepsilon \qquad (3).$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и $t > 0$ настолько малыми, чтобы одновременно выполнялись неравенства (3) и $q + \varepsilon + t < 1$.

Тогда

$$W = \Pi^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i + (q + \varepsilon)B$$

и, следовательно,

$$V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Pi(x_i) + (q + \varepsilon)\Pi(B).$$

Отсюда получаем, что

$$cl(V) \subseteq cl\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi(x_i) + (q + \varepsilon)\Pi(B)\right) \subseteq \Pi(E) + (q + \varepsilon)B^{**}.$$

Так как $F_0 \in cl(V)$, то

$F_0 \in \Pi(E) + (q + \varepsilon)B^{**}.$

Это означает, что

$$d(F_0, \Pi(E)) \le q + \varepsilon$$

и в силу выбора ε и t

$d(F_0, \Pi(E)) < 1 - t,$

что противоречит выбору F_0.

Теорема доказана.

Из равенства характеристик $\varepsilon_1(E)$ и $\beta(E)$ получается усиление теоремы 2.

Следствие

Если $\varepsilon_1(E) < 1$, то пространство E рефлексивно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Меры некомпактности и уплотняющие операторы : коллективная монография [Текст] / Р.Р. Ахмеров [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1986. – 265 с.
2. Пич, А. Ядерные локально-выпуклые пространства : монография [Текст] / А. Пич. – М. : Мир, 1967. – 266 с.
3. Потапов, А.С. Меры некомпактности некоторых множеств [Текст] / А.С. Потапов // Функциональный анализ и его приложения. – Воронеж, 1973. – № 1. – С. 23–27.
4. Banas, J. Applications of measures of noncompactness to various problems / J. Banas // Matematyka I Fizika. – Rzeszow. – 1997 – № 5. – С. 3–115.